Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις α΄ Τάξης

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (MSc)

Άσκηση 1

Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις.

(i) $(3x^2+1)y'(x) - 2xy(x) = 6x$,

(ii) $y'(x) + (\tan x)y(x) = \sin 2x,\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Άσκηση 2

Να λυθούν τα παρακάτω π.α.τ

(i) $y'(x) - 3y(x) = xe^{3x},\ y(0) = 1$

(ii) $xy'(x) + y(x) = x,\ y(1) = 0$

Που ορίζεται η λύση του π.α.τ στο ζήτημα (ii);

Άσκηση 3

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε το π.α.τ

$$y'(t) - y(t) = 1 + 4\sin t,\ y(0) = a$$

Να βρείτε το a ώστε η (μοναδική) λύση του π.α.τ να είναι φραγμένη.

Άσκηση 4

Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$e^{x^2}y'(x) + y(x) = g(x),$$

όπου

$$g(t) = \begin{cases} \pi - x & , \quad x \in [0,\pi) \\ 0 & , \quad x \geq \pi \end{cases},$$

(i) Εξετάστε αν υπάρχει λύση y_0 της εξίσωσης ώστε $y_0(\pi) = 0$ Αν ναι, τότε είναι μοναδική; Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

(ii) Αν υπάρχει τέτοια λύση y_0 χαρακτηρίστε τα παρακάτω ως Αληθή ή Ψευδή:

  (a) Η λύση y_0 είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν στο $[0, +\infty)$.

  (b) Η λύση y_0 είναι τελικά ίση με μηδέν.

(iii) Να λύσετε το π.α.τ

$$e^{x^2}y'(x) + y(x) = 0,\ y(-1) = 0$$

Άσκηση 5

Εξετάστε αν το π.α.τ

$$y'(t) + y(t) = g(t),\ y(0) = 0$$

όπου

$$g(t) = \begin{cases} 2 & , \quad t \in [0,1] \\ 0 & , \quad t > 1 \end{cases},$$

έχει λύση στο $[0, +\infty)$.

Άσκηση 6
Ας είναι $a, b, \kappa > 0$ και $\lambda \geq 0$. Δίνεται η διαφορική εξίσωση:

$$ay' + by = \kappa e^{-\lambda x},\ x \in \mathbb{R}$$

(i) Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του λ.

(ii) Αν y_0 είναι μία λύση της εξίσωσης, δείξτε ότι:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} y_0(x) = \dfrac{\kappa}{b}$, αν $\lambda = 0$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} y_0(x) = 0$, αν $\lambda > 0$.

Άσκηση 7
Ας είναι $b > 0,\ a \neq 0$. Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση

$$y'(t) + by(t) = \sin(at),$$

και εξετάστε αν υπάρχει λύση συγκλίνουσα όταν $t \to +\infty$.

Άσκηση 8
Δίνεται το π.α.τ

$$y'(t) + 2y(t) = g(t),\ y(0) = 0,$$

όπου

$$g(t) = \begin{cases} 1 - |x| & , \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases},$$

Αν y_0 είναι μια λύση του δοθέντος π.α.τ,

(i) υπολογίστε την τιμή $y_0(\ln 10)$

(ii) εξετάστε αν η λύση y_0 είναι φραγμένη στο $[0, +\infty)$

(iii) εξετάστε αν η λύση y_0 είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 9
Έστω συνεχής συναρτηση $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$ και ας είναι $\kappa \in \mathbb{R}^*$ και $a \in \mathbb{R}$. Δίνεται επίσης το π.α.τ

$$y'(t) - \kappa^2 y(t) = g(t),\ y(0) = a.$$

Αν $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\kappa^2 s} g(s)dt = 0$, να δείξετε ότι

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0 \ \text{ αν και μόνο αν } \ a = 0$$

Άσκηση 10
Έστω $a > 0$ και δίνεται η γραμμική δ.ε α' τάξης

$$(E)\ \ y'(t) + ay(t) = g(t),\ t \geq 0$$

όπου $g\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\lim g(t) := l \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι κάθε λύση της (E) τείνει προς το $\dfrac{l}{a}$ όταν $t \to +\infty$. (Υπόδειξη: Θέστε $y = z + \dfrac{l}{a}$)

Άσκηση 11

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y'(x) + ky(x) = f'(x) + mf(x),\ x \in \mathbb{R}\ (k > 0, m \in \mathbb{R}).$$

(i) Αν $k = m$, να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις y της εξίσωσης τείνουν ασυμπτωτικά προς την f, για $x \to +\infty$ [δηλαδή, $\lim\limits_{x\to+\infty}(y(x) - f(x)) = 0$]. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε μια συνάρτηση g έτσι ώστε όλες οι λύσεις της εξίσωσης

$$y'(x) + 5y(x) = g(x),\ x \in \mathbb{R}$$

να τείνουν ασυμπτωτικά προς τη συνάρτηση $2x^2 + 5x - 6$, για $x \to +\infty$.

(ii) Αν $m = k + 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2024$, να εξετασθεί αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$

Άσκηση 12

Έστω $a \geq 0$ και θεωρούμε το π.α.τ

$$y'(x) + e^x(2 + \sin x)y(x) = \frac{1}{x^2+1},\ y(0) = a,\ x \geq 0.$$

(i) Αν y_0 λύση του π.α.τ να δείξετε ότι η y_0 τείνει προς το 0, όταν $x \to +\infty$.

(ii) Εξετάστε αν υπάρχουν ταλαντούμενες λύσεις.

(iii) Αν y_0 λύση του π.α.τ δείξτε ότι η y_0 είναι τελικά θετική.